

$F(\lambda) = \lambda \cdot G^{-1}$ als Lösung der Säkulargleichung bei n gleichen Eigenwerten

A. FADINI

Lehrstuhl für Technische Mechanik
der Technischen Hochschule Stuttgart

(Z. Naturforsch. 21 a, 484—485 [1966]; eingegangen am 26. Februar 1966)

Satz: Es sei G^{-1} eine reelle, symmetrische, nicht-singuläre und positiv definite Matrix. Dann ist für eine beliebige Ordnung n und für n gleiche, reelle und positive Eigenwerte

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n \quad (1)$$

die Matrix

$$F(\lambda) = \lambda \cdot G^{-1} \quad (2)$$

reell, symmetrisch, nichtsingulär und positiv definit und sie erfüllt die Säkulargleichung¹

$$\det(F - \lambda \cdot G^{-1}) = 0. \quad (3)$$

Zur Realität, Symmetrie, Nichtsingularität und positiven Definitheit von $F(\lambda)$

Die Realität von $F(\lambda)$ ist durch die Realität von λ und G^{-1} gesichert. Ebenso folgt sofort aus der Definition des Produktes einer Matrix mit einem Skalar³ die Symmetrie, Nichtsingularität und positive Definitheit von $F(\lambda)$. Weiterhin geht aus den Sätzen der Matrizenrechnung die Realität, Symmetrie, Nichtsingularität und positive Definitheit von G hervor⁴.

$F(\lambda)$ als Lösung der Säkulargleichung

Auf mannigfache Art läßt sich $F(\lambda)$ als Lösung der Säkulargleichung nachweisen. Wir bringen hier drei kurze Beweise:

1. Wegen der Gleichheit der Eigenwerte (1) können wir mit (2) in die Säkulargleichung (3) eingehen und erhalten:

$$\det(\lambda \cdot G^{-1} - \lambda \cdot G^{-1}) = \det 0 = 0. \quad (4)$$

Wir bekommen also eine Nullmatrix 0 , deren Determinante wegen den Nullelementen selbst Null ist. Damit erfüllt $F(\lambda)$ die Säkulargleichung.

2. Nach einem Satz der Matrizenrechnung⁵ läßt sich das Problem der Berechnung der Matrix F aus der Säkulargleichung auf die Matrizenungleichungen

¹ Für den Fall $n=2$ läßt sich explizit nachweisen, daß $F(\lambda)$ die einzige Lösung der Säkulargleichung (3) ist². Für die Fälle $n > 2$ läßt sich die Eindeutigkeit von $F(\lambda)$ unter Zugrundelegung der Unabhängigkeit der f_{ik} mit $i, k=1, 2, \dots, n$ in $F(\lambda)$ voneinander zeigen. In einer weiteren Arbeit soll darauf eingegangen werden.

² A. FADINI, Z. Naturforsch. 21 a, 426 [1966].

³ R. ZURMÜHL, Matrizen, Springer-Verlag, Berlin 1961, S. 9, 133.

⁴ Siehe³, S. 34.

⁵ F. R. GANTMACHER, Matrizenrechnung, Teil I, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1958, S. 81.

⁶ Siehe³, S. 176—177.

⁷ K. STRUBECKER, Höhere Mathematik, Oldenbourg-Verlag, München 1956, S. 160.

$$\text{sp}(G \cdot F)^k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k = n \cdot \lambda^k \quad \text{mit } k=1, 2, \dots, n \quad (5)$$

zurückführen. Wir gehen mit (2) in Gl. (5) ein und erhalten:

$$\begin{aligned} \text{sp}(G \cdot \lambda \cdot G^{-1})^k &= \text{sp}(\lambda \cdot G \cdot G^{-1})^k = \text{sp}(\lambda \cdot E)^k \\ &= \lambda^k \cdot \text{sp } E = \lambda^k \cdot n = n \cdot \lambda^k \end{aligned} \quad (6)$$

für alle k . (Dabei ist E die Einheitsmatrix und $E^k = E$.) Das heißt, $F(\lambda)$ erfüllt die Säkulargleichung.

3. Die Bestimmung von F kann auch auf die CAYLEY-HAMILTONSche Gleichung⁶

$$(G \cdot F)^n + c_{n-1} \cdot (G \cdot F)^{n-1} + \dots + c_0 \cdot E = 0 \quad (7)$$

zurückgeführt werden. Dabei berechnen sich die n Koeffizienten c_0 bis c_{n-1} aus den n Eigenwerten λ nach dem Satz von VIETA⁷. Die charakteristische Gleichung lautet:

$$\lambda^n + c_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \dots + c_0 = 0. \quad (8)$$

Damit bekommen wir nach Eingehen mit $F(\lambda)$ in Gl. (7) wegen $G \cdot F = \lambda \cdot E$

$$E \cdot (\lambda^n + c_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \dots + c_0) = E \cdot 0 = 0 = 0, \quad (9)$$

d. h. $F(\lambda)$ ist eine Lösung der Säkulargleichung.

Verwendung von $F(\lambda)$ zur Bereichsabschätzung von Wechselwirkungskonstanten

Bei der Berechnung von Molekülkraftkonstanten tritt das Problem auf, die Kraftkonstantenmatrix F aus der Säkulargleichung zu berechnen^{8, 2}. Die Lösung $F(\lambda)$ stellt einen extremen Fall der Kopplung in der Matrix F der Kraftkonstanten dar^{9, 10}. Wir verwenden $F(\lambda)$ als Modell zur Bereichsabschätzung von Wechselwirkungskraftkonstanten. Für Moleküle mit hinreichend starken Kopplungen können wir mit $F(\lambda)$ die Vorzeichen und die Bereiche der Kopplungskonstanten berechnen^{2, 11}. Bei schwach gekoppelten Molekülen kann wenigstens der Absolutbetrag des Bereichs angegeben werden.

Die Lösungsbereiche von f_{12} der Moleküle ClCN und BrCN

Wir schätzen hier die Lösungsbereiche der Wechselwirkungskraftkonstanten f_{12} der beiden Moleküle ClCN und BrCN der Symmetrie $C_{\infty v}$ ab, für die durch den Zentrifugaldehnungseffekt hinreichend genaue Ver-

⁸ E. B. WILSON, J. C. DECUS u. P. C. CROSS, Molecular Vibrations, Verlag McGraw-Hill, New York 1955, S. 63—64.

⁹ H. SIEBERT, Anwendungen der Schwingungsspektroskopie in der Anorganischen Chemie, Springer-Verlag, Berlin 1966, Abschn. I.2.b.

¹⁰ Eine qualitative Erläuterung für Molekülschwingungen findet sich in dem angegebenen Buch von SIEBERT⁹. Eine ausführliche Begründung kann mit der Theorie der kleinen Schwingungen gegeben werden, worauf noch später eingegangen werden soll.

¹¹ A. FADINI, Programm der wissenschaftlichen Jahrestagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik vom 12. bis 16. April 1966 in der Technischen Hochschule Darmstadt.



gleichswerte bekannt sind¹². Aus Gl. (2) folgt hier als obere Grenze^{13, 8}

$$f_{12, \max} = -\lambda \cdot \det^{-1} \mathbf{G} \cdot \mathbf{g}_{12} = \lambda \cdot \det^{-1} \mathbf{G} \cdot m_C^{-1} \quad (\text{mit } m_C \text{ Masse von C}). \quad (10)$$

Die vollständigen Datensätze der \mathbf{G} -Matrix und der λ -Werte finden sich in der Literatur^{2, 14}. Von den beiden Eigenwerten λ_1 und λ_2 verwenden wir stets den kleineren. Damit erhalten wir aus Gl. (10) die Lösungsbereiche:

¹² W. J. JONES, W. J. ORVILLE-THOMAS u. U. OPIK, J. Chem. Soc. 1959, 1625.

¹³ Siehe³, S. 37.

$$0 < f_{12}(\text{ClCN}) = f_{\text{ClC/CN}} < 2,4 \text{ mdyn/\AA}, \quad (11)$$

$$0 < f_{12}(\text{BrCN}) = f_{\text{BrC/CN}} < 2,0 \text{ mdyn/\AA}. \quad (12)$$

Nach dem Zentrifugalehnungseffekt erhält man die Werte:

$$f_{\text{ClC/CN}} = 1,33 \text{ mdyn/\AA} \quad \text{und} \quad f_{\text{BrC/CN}} = 0,7 \text{ mdyn/\AA}^{12}.$$

Meinen Hochschullehrern Prof. COUBEAU, Prof. SLIBAR und Prof. BECHER danke ich herzlich für ihr Interesse und ihre Unterstützung.

¹⁴ A. FADINI, Z. Angew. Math. Mech., Sonderheft der Tagung Ges. Angew. Math. Mech., Wien 1965, im Druck.

Messung der Geschwindigkeit elektrisch leitfähiger Medien

H. BURKHARDT und G. SCHNELL

Institut für Plasmaforschung der Technischen Hochschule Stuttgart

(Z. Naturforsch. 21 a, 485—487 [1966]; eingegangen am 23. Februar 1966)

Aus den MAXWELL-Gleichungen resultiert, daß ein strömendes, elektrisch leitfähiges Medium mit einem Magnetfeld in Wechselwirkung tritt. Diese Wechselwirkung führt zu einer Verschleppung des Feldes. Die Größe der Verschleppung ist sowohl ein Maß für die Geschwindigkeit als auch für die Leitfähigkeit des Mediums. Bei bekannter Leitfähigkeit kann also die Geschwindigkeit direkt gemessen werden^{1, 2}.

Von der Vielfalt der möglichen geometrischen Meßanordnungen werden hier zwei untersucht, die den Anforderungen der Praxis besonders entsprechen:

1. Eine ebene Anordnung, die beispielsweise für die Messung an MHD-Plasma-Kanälen rechteckigen Querschnitts geeignet ist (Abb. 1).
2. Eine zylindersymmetrische Anordnung, die die Ausmessung von Plasmastrahlen runden Querschnitts ermöglicht (Abb. 2).

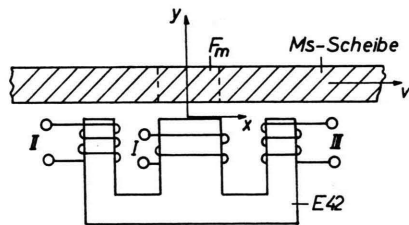


Abb. 1. Prinzipskizze der ebenen Anordnung. I Erregerspule, II und III Empfängerspulen, E 42 Ferritkern, F_m wirksamer Querschnitt (Ms-Scheibendicke mal Mittelschenkelbreite).

¹ A. E. FUHS, Am. Inst. Aeron. Astronaut. J. 2, 667 [1964].

² L. P. POBEREZHSHII, Soviet Phys. — Tech. Phys. 8, 1092 [1964].

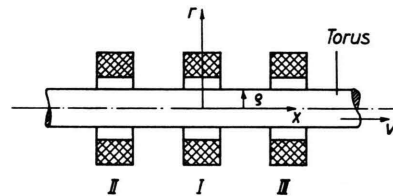


Abb. 2. Prinzipskizze der zylindersymmetrischen Anordnung. I, II, III wie Abb. 1. ϱ Objektradius.

1. Näherungslösungen

Es werden zwei theoretische Abschätzungen angegeben, die für Meßfrequenzen gelten, bei denen der Skin-Effekt zu vernachlässigen ist ($f < 100$ Hz).

1.1. Ebene Meßanordnung³

Die magnetische Induktion B der Spule I erzeugt über dem Mittelschenkel des Kerns im Medium einen Flächenstrom gemäß folgender Beziehung

$$J = \sigma v B F_m. \quad (1)$$

F_m ist der wirksame Querschnitt des Mediums (vgl. Abb. 1). Das von J erzeugte Sekundärmagnetfeld erzeugt die Meßspannung

$$U_v = f R_m L J_0 \frac{w_{II} F_1 F_m}{w_I x^2 F_s 2}. \quad (2)$$

Dabei sind w_I und w_{II} die entsprechenden Spulenwindungszahlen; f ist die Frequenz, L die Induktivität und J_0 der Erregerstrom von Spule I; F_1 und F_s sind die Querschnitte des linken und des mittleren Kernschenkels. R_m ist die magnetische REYNOLDS-Zahl

$$R_m = \sigma \mu v l, \quad (3)$$

mit der Permeabilität μ , der elektrischen Leitfähigkeit σ , der Geschwindigkeit v und einer charakteristischen Länge l des strömenden Mediums.

Der Faktor $\frac{1}{2}$ ist eine Anpassungsgröße, die dadurch entsteht, daß für die Rechnung der volle Betrag des

³ H. BURKHARDT u. G. SCHNELL, Bericht 1—24 [1965]; Institut für Hochtemperaturforschung der Techn. Hochschule Stuttgart.